Управление образования города Пензы
МКУ «Центр комплексного обслуживания и методологического обеспечения учреждений образования» г. Пензы
МБОУ СОШ №20

XXVI научно-практическая конференция школьников г. Пензы
«Я исследую мир»

Монотонность функции
в решении уравнений

Выполнил:
Щербаков Владислав Алексеевич
МБОУ СОШ №20, 10А класс

Руководитель:
Мандрыченко Олег Борисович
учитель математики МБОУ СОШ №20

Пенза 2021

Содержание:

1. Введение.

При изучении процессов реального мира (биологических, химических, физических, экономических и многих других) мы постоянно встречаемся с характеризующими их величинами, меняющимися в течение рассматриваемых процессов. При этом часто бывает, что изменение одной величины является причиной изменения другой. Взаимосвязанные изменения числовых характеристик рассматриваемых величин приводят к их функциональной зависимости в соответствующих математических моделях. А математической моделью любого процесса является, как минимум, некое уравнение или неравенство.

Не всякое уравнение (неравенство) в результате преобразований может быть сведено к уравнению (неравенству) того или иного стандартного вида, для которого существует известный алгоритм решения. В таких случаях иногда оказывается полезным использовать другие методы решения, которые и будут рассмотрены в данной работе.

Целью данной работы является ознакомление с возможностью использования монотонности функции для решения нестандартных уравнений.

Задачи исследования:

- познакомиться с понятием монотонности функции и её свойствами;
- рассмотреть и применить на практике свойства монотонности функции при решении уравнений;
- показать случай возможного неверного применения монотонности функции с рассмотрением верного решения.

Объектом исследования являются уравнения, не поддающиеся решению с помощью стандартных методов, или отличающиеся громоздкостью стандартного решения.

Субъектом исследования являются свойства монотонности функции, применяемые при решении таких уравнений.

Гипотеза исследования основана на том, что верное использование монотонности функций является хорошим помощником для решения нестандартных уравнений.

В работе применялись аналитический и сравнительный методы исследования.

Актуальность и практическая значимость работы заключается в том, что не всегда при решении сложных задач имеется возможность применения стандартных способов, а, следовательно, требуется владение и нестандартными методами. Однако применять их нужно очень внимательно, чтобы избежать возможных ошибок.

2. Основная часть.

2.1. Определение и признаки монотонности функции.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется возрастающей на промежутке X, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка, таких что $x_1 < x_2$ выполняется условие $f(x_1) < f(x_2)$.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется возрастающей на промежутке X, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка, таких что $x_1 < x_2$ выполняется условие $f(x_1) > f(x_2)$.

Термины «возрастающая функция» и «убывающая функция» объединяются общим названием – **монотонная функция**. Исследование функции на возрастание и убывание называют исследованием функции на монотонность.

Признаки монотонности функции:

Теорема 1 (необходимое условие монотонности функции).

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$, тогда:

1) если функция $f(x)$ монотонно возрастает на интервале $(a; b)$, то $f'(x) > 0$ на $(a; b)$.

2) если функция $f(x)$ монотонно убывает на интервале $(a; b)$, то $f'(x) < 0$ на $(a; b)$.

Теорема 2 (достаточное условие монотонности функции).

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$, тогда:

1) если для любой точки интервала $(a; b)$ $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ возрастает на интервале $(a; b)$.

2) если для любой точки интервала $(a; b)$ $f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ на интервале $(a; b)$.

2.2. Свойства монотонных функций.

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ возрастают (убывают) на интервале $(a; b)$, то сумма функций $f(x)+g(x)$ также возрастает (убывает) на интервале $(a; b)$.
2. Если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на интервале $(a; b)$, то противоположная функция $-f(x)$ убывает (возрастает) на интервале $(a; b)$.
3. Если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на интервале $(a; b)$, то обратная функция $\frac{1}{f(x)}$ убывает (возрастает) на интервале $(a; b)$.
4. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ возрастают (убывают) на интервале $(a; b)$ и, кроме того, $f(x) \geq 0; g(x) \geq 0$, то произведение функций $f(x)$ и $g(x)$ также возрастает (убывает) на интервале $(a; b)$.
5. 5. Если функция $g(x)$ возрастает (убывает) на интервале $(a; b)$, а функция $f(x)$ возрастает (убывает) на интервале (с; d), где $g(x):(a;b) \to (c;d)$, то композиция функций $f * g$ (то есть сложная функция $y = f(g(x))$) также возрастает (убывает) на интервале $(a; b)$.

2.3. Свойства монотонности, применяемые при решении уравнений и неравенств.

1. Пусть $f(x)$ - непрерывная и строго монотонная функция на промежутке *D*. Тогда уравнение $f(x)=C$ (С – константа) может иметь не более одного корня на промежутке *D*.
2. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ - непрерывные на промежутке *D* функции, причём $f(x)$ строго возрастает, а $g(x)$ строго убывает на этом промежутке. Тогда уравнение $f(x)=g(x)$ может иметь не более одного корня на этом промежутке (или корней нет).
3. Если функция $f(t)$ строго возрастает или строго убывает на множестве действительных чисел, то уравнение $f(h(x))=f(g(x))$ равносильно уравнению $h(x)=g(x)$.
4. Если функция $f(x)$ строго возрастает на некотором промежутке, то уравнение $f(f(x))=x$ равносильно уравнению $f(x)=x$ на этом промежутке. (Следствие. Если *n* – натуральное число и функция $f(x)$ монотонно возрастает, то уравнения $f(f(...f(x)...)=x$ ($f-n$ раз) и $f(x)=x$ имеют одно и то же множество корней.)
5. Если функция $f(t)$ строго возрастает на множестве действительных чисел, то неравенство $f(h(x))>f(g(x))$ равносильно неравенству $h(x)>g(x)$.
6. Если функция $f(t)$ строго убывает на множестве действительных чисел, то уравнение $f(h(x))>f(g(x))$ равносильно неравенству $h(x)<g(x)$.
7. Если функция $f(x)$ возрастает на интервале (*a; b*) и x_0 – единственный корень уравнения $f(x)=c$, принадлежащий указанному интервалу, то решением неравенства $f(x)>c$ является интервал (x_0; *b*), а решением неравенства $f(x)<c$ является интервал (*a*; x_0).
8. 8. Если функция $f(x)$ строго возрастает, а функция $g(x)$ строго убывает на интервале (*a; b*) и x_0 – единственный корень уравнения $f(x)=g(x)$, принадлежащий указанному интервалу, то решением неравенства $f(x)>g(x)$ является интервал (x_0; *b*), а решением неравенства $f(x)<g(x)$ является интервал (*a*; x_0).

2.4. Примеры применения монотонности функций при решении уравнений.
2.4.1. Уравнения, имеющие не более одного корня.

Пример 1. Решить уравнение $2^{x+1}=\sqrt{18-2x}$.

Решение. Рассмотрим левую и правую части уравнения как различные функции: $y=2^{x+1}$ и $y=\sqrt{18-2x}$. Первая из указанных функций возрастает, а вторая убывает на всей области определения. Следовательно, уравнение может иметь не более одного корня, который находим элементарным подбором: *x = 1*. ***Ответ: 1.***

Пример 2. Решить уравнение $\log_3(x+2)=\sqrt{2-x}$.

Решение. Рассмотрим левую и правую части уравнения как различные функции: $y=\log_3(x+2)$ и $y=\sqrt{2-x}$. Первая из указанных функций возрастает, а вторая убывает на всей области определения. Следовательно, уравнение может иметь не более одного корня, который находим элементарным подбором: *x = 1*. ***Ответ: 1.***

Пример 3. Решить уравнение $0,2^{x+1}=\sqrt{35+5x}$.

Решение. Рассмотрим левую и правую части уравнения как различные функции: $y=0,2^{x+1}$ и $y=\sqrt{35+5x}$. Первая из указанных функций убывает, а вторая возрастает на всей области определения. Следовательно, уравнение может иметь не более одного корня, который находим элементарным подбором: *x = -2*. ***Ответ: -2.***

Пример 4. Решить уравнение $\log_2(2x-x^2+15)=x^2-2x+5$.

Решение. Выполним замену $2x-x^2+15=t$. Тогда $2x-x^2+5=20-t$. Получаем уравнение $\log_2 t=20-t$. Рассмотрим левую и правую части уравнения как различные функции: $y=\log_2 t$ и $y=20-t$. Первая из указанных функций возрастает, а вторая убывает на всей области определения. Следовательно, уравнение может иметь не более одного корня, который находим элементарным подбором: *t = 16*. Делаем возврат и получаем квадратное уравнение $2x-x^2+15=16$, которое имеет единственный корень *x = 1*. Проверкой обязательно убеждаемся в верности подобранного значения. ***Ответ: 1.***

Пример 5. Решить уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}+\sqrt{x+24}=11$

$$\text{ОДЗ}:\begin{cases}x\ge 0,\\ x+3\ge 0,\\ x+8\ge 0,\\ x+24\ge 0.\end{cases}\Rightarrow\ x\ge 0.$$

Известно, что сумма возрастающих функций есть функция возрастающая. Левая часть представляет собой возрастающую функцию $y=\sqrt{x}+\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}+\sqrt{x+24}$. Правая часть – константа. Следовательно, уравнение может иметь только один корень. Найдем его подбором. Имеем *x = 1*. ***Ответ: 1.***

Пример 6. Решить уравнение $\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+6}=4-\sqrt{(x+6)(2x-1)}+3\sqrt{x+2}$

$$\text{ОДЗ:}\ \begin{cases}(x+2)(2x-1)\ge 0,\\ (x+2)\ge 0,\\ x+6\ge 0;\end{cases}\quad \text{т.е. } x\ge 0{,}5.$$

Преобразуем уравнение $\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+6}+\sqrt{(x+6)(2x-1)}-3\sqrt{x+2}=4$,

$\sqrt{2x-1}(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6})-3(\sqrt{x+6}+\sqrt{x+2})=4$, $(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6})(\sqrt{2x-1}-3)=4$.

Левая часть представляет собой возрастающую функцию (произведение возрастающих функций), правая часть – константа. Следовательно, исходное уравнение должно иметь единственный корень, который можно найти подбором, *x = 7*.

Проверка: $(\sqrt{7+2}+\sqrt{7+6})(\sqrt{14-1}-3)=4(\textit{верно})$. ***Ответ: x = 7.***

2.4.2. Использование производной для доказательства монотонности.

Пример 7. Решить уравнение $x^8+99\cos(7-6x)=99\cos(x^2)+(7-6x)^4$.

Решение. Преобразуем уравнение к следующему виду

$x^8-99\cos(x^2)=(7-6x)^4-99\cos(7-6x)$ или $f(x^2)=f(7-6x)$,

где $f(t)=t^4-99\cos t$.

Функция $y=f(t)$ - чётная и при $t>0$ имеет следующую производную

$$f'(t)=\begin{cases}4t^3+99\sin t, 0<t\le 3,\\ 4t^3+99\sin t, t>3.\end{cases}$$

Поэтому $f'(t)>0$ при всех $t>0$, следовательно, функция $y=f(t)$ монотонно возрастает на положительной полуоси и каждое своё значение принимает ровно в двух точках, симметричных относительно нуля.

Тогда данное уравнение равносильно следующим двум уравнениям

$x^2=7-6x$	$x^2=-(7-6x)$
$x^2+6x-7=0$	$x^2-6x+7=0$
$x=1, x=-7$	$x=3\pm\sqrt{2}$.

Ответ: *1; -7;* $x=3\pm\sqrt{2}$.

Пример 8. Найдите все такие значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left(4x-x^2\right)^2-32\sqrt{4x-x^2}=a^2-14a$ имеет хотя бы одно решение.

Решение. Рассмотрим две функции $y=\left(4x-x^2\right)^2-32\sqrt{4x-x^2}$ и $y=a^2-14a$.

Вторая функция линейная – графиком является прямая, параллельная оси *Ox*.

Исследуем первую функцию. Найдём её область определения, для чего решим неравенство $4x-x^2\ge 0$. Получим интервал $\left[0;4\right]$. На этом интервале множествоv значений выражения $\sqrt{4x-x^2}$ является интервал $\left[0;2\right]$.

Сделаем замену $\sqrt{4x-x^2}=t$, при $t\in\left[0;2\right]$ и рассмотрим функцию $f(t)=t^4-32t$, равносильную исходной на указанном интервале. Исследуем её на монотонность, для чего найдём производную $f'(t)=4t^3-32$.

При $t\in\left[0;2\right]$ $f'(t)<0$, следовательно функция монотонно убывает и имеет ровно одну точку пересечения с прямой $y=a^2-14a$ при $f(t)\in\left[-48;0\right]$ ($f(0)=0, f(2)=-48$).

Следовательно, для того, чтобы уравнение имело хотя бы одно решение, требуется выполнение условия $-48\le a^2-14a\le 0$. Решая двойное неравенство получаем ответ в виде объединения двух промежутков. ***Ответ:*** $\left[0;6\right]\cup\left[8;14\right]$.

2.4.3. Использование равносильности уравнений $f(f(x))=x$ и $f(x)=x$.

Пример 9. Решить уравнение $x^3-7\sqrt[3]{7x-6}+6=0$.

Решение. Преобразуем уравнение к следующему виду

$\sqrt[3]{7x-6}=\dfrac{x^3+6}{7}$ и возведём левую и правую части получившегося равенства в куб.

Получим $7x-6=\left(\dfrac{x^3+6}{7}\right)^3$ или $x=\dfrac{\left(\dfrac{x^3+6}{7}\right)^3+6}{7}$,

т.е. уравнение вида $f(f(x))=x$, где $f(x)=\dfrac{x^3+6}{7}$.

Функция $f(x)=\dfrac{x^3+6}{7}$ возрастает на всей числовой прямой, поэтому уравнение $f(f(x))=x$ равносильно уравнению $f(x)=x$. Поэтому $\dfrac{x^3+6}{7}=x$. Решим последнее уравнение, используя группировку:

$$x^3-7x+6=0$$
$$x^3-x-6x+6=0$$
$$x(x^2-1)-6(x-1)=0$$
$$x(x-1)(x+1)-6(x-1)=0$$
$$(x-1)(x(x+1)-6)=0$$
$$(x-1)(x^2+x-6)=0$$

Тогда $\begin{array}{l} x-1=0 \\ x=1 \end{array}$ или $\begin{array}{l} x^2+x-6=0 \\ x=-3 \quad x=2 \end{array}$.

Ответ: $-3;\ 1;\ 2$.

Пример 10. Решить уравнение $x^3-8=16\sqrt[3]{x+1}$.

Решение. Преобразуем уравнение: $x^3=8\left(2\sqrt[3]{x+1}+1\right)$ или $x=2\sqrt[3]{2\sqrt[3]{x+1}+1}$.

Получаем уравнение вида $f(f(x))=x$, где $f(x)=2\sqrt[3]{x+1}$.

Функция $f(x)=2\sqrt[3]{x+1}$ возрастает на всей числовой прямой, поэтому уравнение $f(f(x))=x$ равносильно уравнению $f(x)=x$. Поэтому $2\sqrt[3]{x+1}=x$. Возведём левую и правую части уравнения в куб и получим уравнение 3-й степени $x^3-8x-8=0$. Решим его:

$$x^3+2x^2-2x^2-8x-8=0$$
$$x^2(x+2)-2(x^2+4x+4)=0$$
$$x^2(x+2)-2(x+2)^2=0$$
$$(x+2)(x^2-2(x+2))=0$$
$$(x+2)(x^2-2x-2)=0$$

Тогда $\begin{array}{l} x+2=0 \\ x=-2 \end{array}$ или $\begin{array}{l} x^2-2x-2=0 \\ x=1\pm\sqrt{5} \end{array}$.

Ответ: -2; $1\pm\sqrt{5}$.

Пример 11. Решить уравнение $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+\sqrt{x^8+1}}}}=x^{15}$.

Решение. $x=0$ - не является корнем данного уравнения, поэтому его можно записать в следующем виде $\dfrac{1}{x^{15}}=x+\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+\sqrt{x^8+1}}}$ или $\dfrac{1}{x^{16}}=1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^8}}}}$.

Откуда получаем уравнение $\dfrac{1}{x^{16}}=1+\dfrac{1}{x^8}$, которое решаем стандартными методами.

$x^{16}+x^8-1=0$. Замена $x^8=t$, $t\geq 0$.

$t^2+t-1=0$

$t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ $\quad$ $t=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ - посторонний корень ($t\geq 0$)

Возврат $x^8=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, следовательно $x=\pm\sqrt[8]{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$.

Ответ: $x=\pm\sqrt[8]{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$.

2.4.4. Ошибка в решении задачи на монотонность.

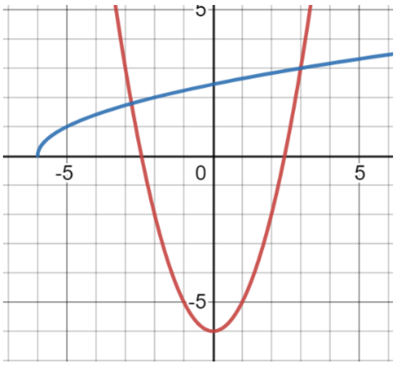
В процессе подготовки данной работы пришлось рассматривать различные задачи, решение которых предполагает использование свойств монотонности. Моё внимание привлекла задача, к которой было приложено полное решение.

Задача. Решите уравнение $x^2-6=\sqrt{x+6}$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt{x+6}$ с областью определения $x\geq-6$. Тогда можно утверждать, что уравнение имеет вид $f^{-1}(x)=f(x)$ или $f(f(x))=x$. Воспользуемся известным фактом: пусть $f(x)$ - возрастающая функция, тогда уравнения $f(f(x))=x$ и $f(x)=x$ равносильны. Наша функция возрастающая, поэтому исходное уравнение равносильно равенству $\sqrt{x+6}=x$. Возводя в квадрат получим уравнение $x^2-x-6=0$, корнями которого являются числа -2 и 3. Проверкой устанавливаем, что -2 – посторонний корень. ***Ответ: 3.***

На первый взгляд всё верно, все условия соблюдены и ответ верный. Но если рассмотреть графическое решение, задав функции $y=x^2-6$ и $y=\sqrt{x+6}$, то становится очевидным, что при $x\geq-6$ уравнение имеет 2 корня: графики имеют две точки пересечения. Первый действительно *3*, а второй по графику определить невозможно. Следовательно, представленное решение не является верным.

Графическая интерпретация решения.



Заметим, что свойство возрастающих функций указано верно. Однако функция $g(x) = x^2 - 6$ не является обратной для функции $f(x) = \sqrt{x+6}$, т.е. равенство $f^{-1}(x) = f(x)$ для данного уравнения верным не является.

Заметим, что $g(f(x)) = f^2(x) - 6 = x$, но $f(g(x)) = \sqrt{g(x)+6} = |x|$. Это выражение совпадает с *x* только при $x \ge 0$. Однако требование неотрицательности корней исходного уравнения отсутствует.

Рассмотрим верное решение. Пусть $y = \sqrt{x+6}$. Учитывая ограничения $x \ge -6$ и $y \ge 0$ получаем систему

$$\begin{cases} y = \sqrt{x+6} \\ x^2 - 6 = y \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y^2 - 6 = x \\ x^2 - 6 = y \end{cases}.$$

Вычтем из первого уравнения второе и получим равенство $(y-x)(y+x+1) = 0$.

1) $y = x$, тогда $x^2 - 6 = x$ или $x^2 - x - 6 = 0$.

Корнями квадратного уравнения будут числа *-2* и *3*, но из-за ограничений *x = 3*.

2) $y + x + 1 = 0$, тогда $x^2 - 6 = -x - 1$ или $x^2 + x - 5 = 0$.

Корнями квадратного уравнения будут числа $\dfrac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$, но из-за ограничений $x = \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$ ($y = -x - 1 \ge 0$, следовательно $-6 \le x \le -1$).

Ответ: 3; $\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$.

3. Заключение.

Не всякое уравнение может быть решено с использованием известных алгоритмов решения. В таких случаях оказывается полезным использовать другие методы решения, например, свойства монотонности функции. В данной работе показано, как работают эти свойства при решении нестандартных уравнений. При этом обращено внимание на возможные ошибки при применении свойств монотонности функции. Гипотеза исследования, основанная на том, что верное использование монотонности функций является хорошим помощником для решения нестандартных уравнений, подтверждена.

4. Литература и источники.

1. Потапов, Шевкин: Алгебра и начала анализа. 11 класс. Базовый и профильный уровни. Книга для учителя / Просвещение./ 2012.

2. Кушнир И. Шедевры школьной математики. Кн.1. – Киев: Астарта, 1995. – 575 с.

3. Е.Д. Кулакин. 3000 конкурсных задач по математике // Москва 2002 г.

4. Мерзляк А.Г. Алгебраический тренажёр: Пособие для школьников и абитуриентов. – М: Илекса, 2001 г.

5. Матвеева Т.А., Светличная В.Б., Мустафина Д.А., Ребро И.В., Рахманкулова Г.А. Особенности методов решения нестандартных задач по математике с параметрами // Современные проблемы науки и образования. – 2020. – № 2.

Интернет-ресурсы:

kvant.mccme.ru – архив номеров журнала «Квант».

pvg.mk.ru – олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»